Exámenes de Selectividad

Física. Madrid 2020, Ordinaria

mentoor.es

Pregunta 1. Opción A. Campo Gravitatorio

Un satélite sigue una órbita circular sincrónica (es decir, del mismo período que el de rotación del planeta) de radio $1,59 \cdot 10^5$ km en torno a un planeta de masa $1,90 \cdot 10^{27}$ kg. Calcule:

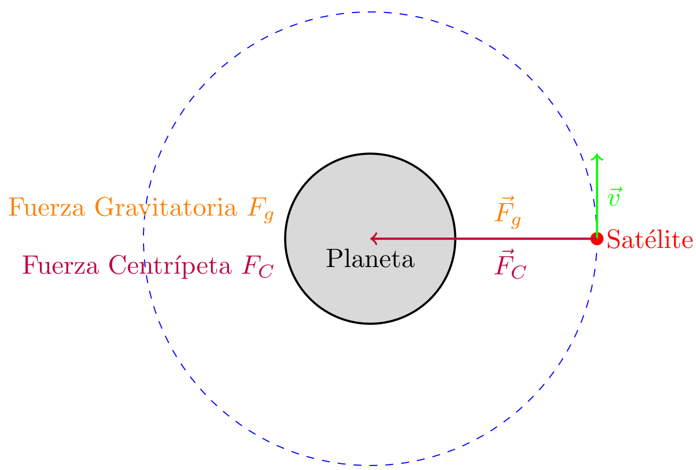
a) **La velocidad del satélite en la órbita.**
b) **El periodo de rotación del planeta sobre su eje.**

Dato: Constante de Gravitación Universal, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m^{2}kg^{-2}.

Solución:

a) **La velocidad del satélite en la órbita.**

Para mantener una órbita circular, la fuerza centrípeta necesaria para mantener al satélite en movimiento circular debe ser igual a la fuerza gravitatoria que lo atrae hacia el planeta:



Matemáticamente, esto se expresa como:

$$\frac{m_s v^2}{r} = G\frac{m_s m_p}{r^2},$$

donde:
- m_s es la masa del satélite,
- v es la velocidad orbital del satélite,
- r es el radio de la órbita,
- G es la constante de gravitación universal,
- m_p es la masa del planeta.

Simplificando la ecuación, cancelamos m_s de ambos lados:

$$v = \sqrt{\frac{Gm_p}{r}}.$$

Sustituyendo los valores proporcionados:

$$v = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}90 \cdot 10^{27}}{1,59 \cdot 10^8}} = 28231{,}96\,\mathrm{m/s}.$$

Por lo tanto, la velocidad del satélite en la órbita es 28231,96 m/s.

b) El periodo de rotación del planeta sobre su eje.

Dado que el periodo de rotación del satélite coincide con el periodo de rotación del planeta, podemos relacionar el periodo (T) con la velocidad orbital mediante la fórmula:

$$T = \frac{2\pi r}{v}.$$

Utilizando los valores calculados anteriormente:

$$T = \frac{2\pi \cdot 1,59 \cdot 10^8}{28231{,}96} = 35386{,}36\,\mathrm{s} = 9{,}83\,\text{horas}.$$

Por lo tanto, el periodo de rotación del planeta sobre su eje es aproximadamente 9,83 horas.

Pregunta 2. Opción A. Ondas

Una onda armónica unidimensional, que se propaga en un medio con una velocidad de 400 m/s, está descrita por la siguiente expresión matemática:

$$\boldsymbol{y(x,t) = 3\,\mathrm{sen}(kx - 200\pi t + \phi_0)\,\mathrm{cm}}$$

donde x y t están en metros y segundos, respectivamente. Sabiendo que $y(0,0) = 1,5\,\mathrm{cm}$ y que la velocidad de oscilación en $t = 0$ y $x = 0$ es positiva, halle:

a) **El número de onda k y la fase inicial ϕ_0.**
b) **La aceleración máxima de oscilación de un punto genérico del eje x.**

Solución:

a) **El número de onda k y la fase inicial ϕ_0.**

La fase de onda se refiere al estado de vibración de un punto de la onda. Para determinar la fase inicial, sustituimos la posición y el tiempo iniciales en la ecuación de la onda:

$$y(0,0) = 1,5\,\mathrm{cm} \quad \Rightarrow \quad 1,5 = 3 \cdot \mathrm{sen}(\phi_0) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{sen}(\phi_0) = \frac{1,5}{3} = 0,5.$$

Las soluciones para ϕ_0 son:

$$\phi_0 = \frac{\pi}{6} \quad \text{o} \quad \frac{5\pi}{6}.$$

Para determinar cuál de estas soluciones es correcta, derivamos la ecuación de la onda para encontrar la velocidad de vibración de la onda y verificamos cuál de las dos fases iniciales da una velocidad positiva en $t = 0$ y $x = 0$. La velocidad de vibración es la derivada de $y(x,t)$ respecto al tiempo:

$$v(x,t) = \frac{\partial y}{\partial t} = -3 \cdot 200\pi \cdot \cos(kx - 200\pi t + \phi_0).$$

Evaluando en $t = 0$ y $x = 0$:

$$v(0,0) = -3 \cdot 200\pi \cdot \cos(\phi_0).$$

Sustituyendo las posibles fases iniciales:

$$\text{Para } \phi_0 = \frac{\pi}{6}: \quad v_y(0,0) = -600\pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -600\pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -600\pi \cdot 0,8660 = -1632\,\mathrm{m/s}.$$

$$\text{Para } \phi_0 = \frac{5\pi}{6}: \quad v_y(0,0) = -600\pi \cdot \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -600\pi \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 600\pi \cdot 0,8660 = 1632\,\mathrm{m/s}.$$

Dado que la velocidad de vibración en $t = 0$ y $x = 0$ es positiva, la fase inicial debe ser $\phi_0 = \frac{5\pi}{6}$.

Conociendo el valor de la frecuencia angular ω, calculamos el número de onda k. La frecuencia angular está relacionada con la velocidad de propagación mediante:

$$\omega = 200\pi\,\mathrm{rad/s} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{200\pi}{2\pi} = 100\,\mathrm{Hz}.$$

La longitud de onda λ se relaciona con la velocidad y la frecuencia mediante:

$$v_p = \lambda \cdot f \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{v_p}{f} = \frac{400\,\mathrm{m/s}}{100\,\mathrm{Hz}} = 4\,\mathrm{m}.$$

El número de onda k se calcula como:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{rad/m}.$$

Por lo tanto, el número de onda es $k = \frac{\pi}{2}$ rad/m y la fase inicial es $\phi_0 = \frac{5\pi}{6}$.

b) **La aceleración máxima de oscilación de un punto genérico del eje x.**

La aceleración de un punto de la onda es la segunda derivada de $y(x,t)$ respecto al tiempo. Comenzamos derivando la ecuación de la onda:

$$y(x,t) = 3 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x - 200\pi t + \frac{5\pi}{6}\right).$$

La primera derivada (velocidad) es:

$$v(x,t) = \frac{\partial y}{\partial t} = -3 \cdot 200\pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}x - 200\pi t + \frac{5\pi}{6}\right).$$

La segunda derivada (aceleración) es:

$$a(x,t) = \frac{\partial v}{\partial t} = 3 \cdot 200\pi \cdot (-200\pi) \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x - 200\pi t + \frac{5\pi}{6}\right) = -120000\pi^2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x - 200\pi t + \frac{5\pi}{6}\right).$$

La aceleración es máxima cuando el seno toma su valor máximo absoluto, es decir, $|\text{sen}(\cdot)| = 1$. Por lo tanto, la aceleración máxima es:

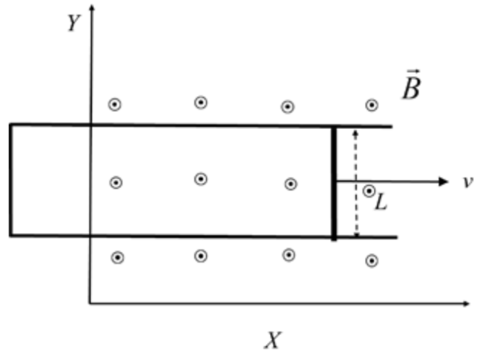
$$a_{\text{max}} = 120000\pi^2 \text{ m/s}^2 = 1,184 \cdot 10^5 \text{ m/s}^2.$$

Por lo tanto, la aceleración máxima es $a_{\text{max}} = 1,184 \cdot 10^5$ m/s^2.

Pregunta 3. Opción A. Campo Electromagnético

Una barra conductora, de 30 cm de longitud y paralela al eje y, se mueve en el plano xy con una velocidad en el sentido positivo del eje x. La barra se mueve sobre unos rieles conductores paralelos en forma de U (ver figura). Perpendicular al plano, hay un campo magnético uniforme $10^{-3}\,\vec{k}$ T. Halle la fuerza electromotriz inducida en la barra en función del tiempo en los siguientes casos:

a) **La velocidad de la barra es constante e igual a $10^2\,\vec{i}$ m/s.**
b) **La barra parte del reposo y su aceleración es constante e igual a $5\,\vec{i}\mathrm{m/s^2}$.**



Solución:

a) **La velocidad de la barra es constante e igual a $10^2\,\vec{i}$ m/s.**

La fuerza electromotriz (ε) inducida en una barra conductora que se mueve en un campo magnético se puede calcular utilizando la Ley de Faraday:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt},$$

donde Φ es el flujo magnético a través del circuito formado por la barra y los rieles. Dado que la barra se mueve con una velocidad constante $\vec{v} = 10^2\,\vec{i}\,\mathrm{m/s}$, el flujo magnético cambia debido al desplazamiento de la barra en el campo magnético $\vec{B} = 10^{-3}\,\vec{k}\,\mathrm{T}$.

El flujo magnético Φ se expresa como:

$$\Phi = B \cdot A = B \cdot l \cdot (x_0 + vt),$$

donde:
- $B = 10^{-3}\,\mathrm{T}$ es la magnitud del campo magnético,
- $l = 0,3\,\mathrm{m}$ es la longitud de la barra,
- x_0 es la posición inicial de la barra en el eje x,
- $v = 10^2\,\mathrm{m/s}$ es la velocidad constante de la barra.

Derivando el flujo respecto al tiempo:

$$\frac{d\Phi}{dt} = B \cdot l \cdot \frac{d}{dt}(x_0 + vt) = B \cdot l \cdot v.$$

Entonces, la fuerza electromotriz inducida es:

$$\varepsilon = -B \cdot l \cdot v = -10^{-3} \cdot 0,3 \cdot 10^2 = -0,03\,\mathrm{V},$$

donde el signo negativo, según la Ley de Lenz, indica que la corriente inducida se opone a la causa que la originó (la variación de flujo en este caso).

Por lo tanto, la fuerza electromotriz inducida en la barra es $\varepsilon = -0,03\,\mathrm{V}$.

b) **La barra parte del reposo y su aceleración es constante e igual a $5\,\vec{i}\mathrm{m/s^2}$.**

En este caso, la barra parte del reposo y adquiere una aceleración constante $\vec{a} = 5\,\vec{i}\,\mathrm{m/s^2}$. La velocidad de la barra en función del tiempo es:

$$v(t) = a \cdot t = 5 \cdot t.$$

El flujo magnético Φ ahora es:

$$\Phi = B \cdot l \cdot (x_0 + \frac{1}{2}at^2).$$

Derivando el flujo respecto al tiempo:

$$\frac{d\Phi}{dt} = B \cdot l \cdot \frac{d}{dt}\left(x_0 + \frac{1}{2}at^2\right) = B \cdot l \cdot (at).$$

Entonces, la fuerza electromotriz inducida es:

$$\varepsilon = -B \cdot l \cdot a \cdot t = -10^{-3} \cdot 0{,}3 \cdot 5 \cdot t = -1{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot t\,\mathrm{V}.$$

De nuevo, el signo nos indica que la fuerza electromotriz se opone a la variación de flujo.

Por lo tanto, la fuerza electromotriz inducida en la barra es $\varepsilon(t) = -1{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot t\,\mathrm{V}$.

Pregunta 4. Opción A. Óptica

Un objeto está situado en una posición s_1 a la izquierda de una lente convergente de distancia focal 50 mm, de modo que forma una imagen real, invertida y de tamaño doble que el objeto. A continuación, el objeto se va moviendo hacia la lente hasta una posición s_2 en la que la imagen es virtual, derecha y de tamaño doble que la del objeto. Calcule:

a) **La posición s_1 inicial del objeto y la distancia inicial entre la imagen y la lente.**
b) **La posición s_2 final del objeto y la distancia final entre la imagen y la lente.**

Solución:

a) **La posición s_1 inicial del objeto y la distancia inicial entre la imagen y la lente.**

Para la primera situación, donde la imagen es real, invertida y de tamaño doble que el objeto, observamos que

$$m = \frac{y'}{y} = \frac{s_1'}{s_1} = -2 \quad \Rightarrow \quad s_1' = -2s_1.$$

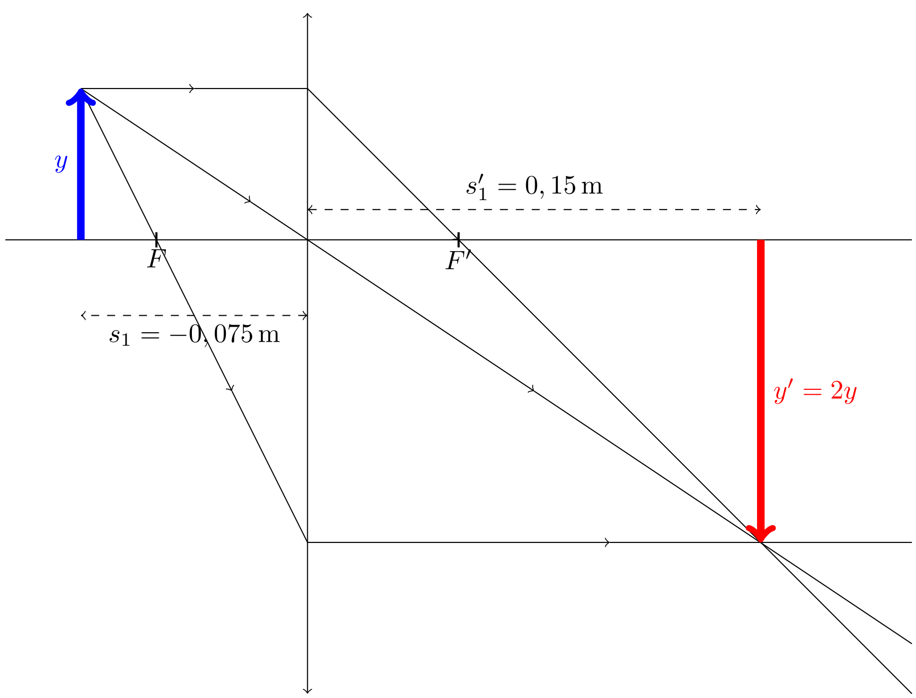
Utilizamos la ecuación de la lente delgada:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{s_1'} - \frac{1}{s_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{-2s_1} - \frac{1}{s_1} = \frac{-3}{2s_1} \quad \Rightarrow \quad s_1 = \frac{-3f}{2} = \frac{-3 \cdot 0,05\,\mathrm{m}}{2} = -0,075\,\mathrm{m}.$$

Así, la posición inicial del objeto es $s_1 = -0{,}075\,\mathrm{m}$. Finalmente, calculamos la distancia inicial entre la imagen y la lente:

$$s_1' = -2s_1 = -2 \cdot (-0{,}075) = 0{,}15\,\mathrm{m}.$$

El diagrama de rayos es:



Por lo tanto, la posición inicial del objeto es $s_1 = -0{,}075\,\mathrm{m}$ y la distancia inicial entre la imagen y la lente es $s_1' = 0{,}15\,\mathrm{m}$.

b) La posición s_2 final del objeto y la distancia final entre la imagen y la lente.

En la segunda situación, la imagen es virtual, derecha y de tamaño doble que el objeto:

$$m = \frac{y'}{y} = \frac{s_2'}{s_2} = 2 \quad \Rightarrow \quad s_2' = 2s_2.$$

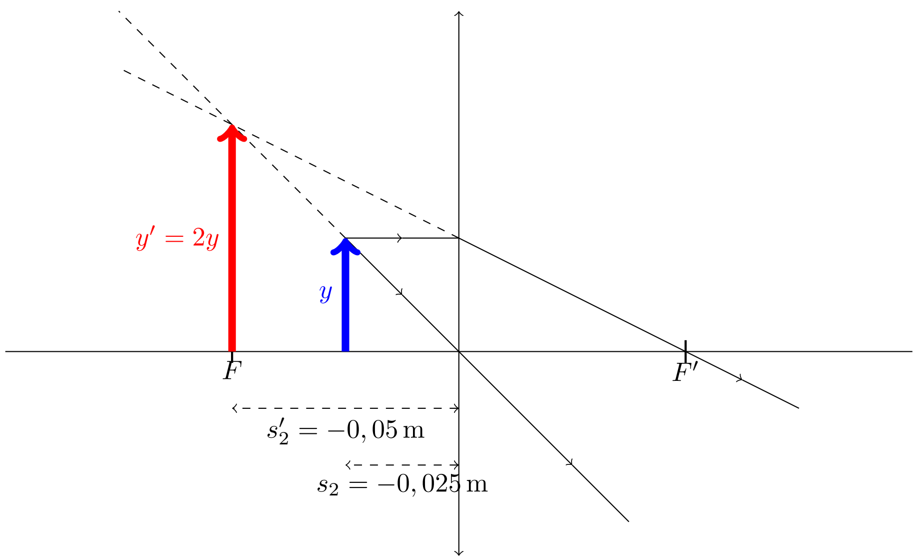
Nuevamente, aplicamos la ecuación de la lente delgada:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{s_2'} - \frac{1}{s_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{2s_2} - \frac{1}{s_2} = -\frac{1}{2s_2} \quad \Rightarrow \quad s_2 = -\frac{f}{2} = -\frac{0,05\,\mathrm{m}}{2} = -0,025\,\mathrm{m}.$$

Así, la posición final del objeto es $s_2 = -0{,}025\,\mathrm{m}$. Calculamos la distancia final entre la imagen y la lente:

$$s_2' = 2s = 2 \cdot -(0{,}025) = -0{,}05\,\mathrm{m}.$$

El trazado de rayos es como sigue:



Por lo tanto, la posición final del objeto es $s_2 = -0{,}025\,\mathrm{m}$ y la distancia final entre la imagen y la lente es $s_2' = -0{,}05\,\mathrm{m}$.

Pregunta 5. Opción A. Física Moderna

Se tienen dos fuentes radiactivas cuya actividad a día de hoy es la misma. Se sabe que dentro de 10 años la actividad de la primera fuente será el doble que la de la segunda. Determine:

a) **La diferencia, $\lambda_2 - \lambda_1$, que existe entre las constantes de desintegración de ambas fuentes.**
b) **La relación entre las actividades de dichas fuentes dentro de 20 años.**

Solución:

a) **La diferencia, $\lambda_2 - \lambda_1$, que existe entre las constantes de desintegración de ambas fuentes.**

La constante de desintegración (λ) representa la probabilidad de desintegración de un núclido por unidad de tiempo. Cuanto mayor es su valor, más rápido se desintegrará una muestra de núclidos. Además, la desintegración radiactiva sigue una cinética de primer orden. La actividad de una fuente radiactiva en función del tiempo se describe por la siguiente ecuación:

$$A(t) = A_0 \cdot e^{-\lambda t}.$$

Dado que para $t = 0$, $A_1 = A_2 = A_0$, y para $t = 10\,\text{años}$, $A_1 = 2A_2$, podemos establecer la siguiente relación:

$$\frac{A_1(10)}{A_2(10)} = \frac{A_0 \cdot e^{-\lambda_1 \cdot t}}{A_0 \cdot e^{-\lambda_2 \cdot t}} = \frac{e^{-\lambda_1 \cdot t}}{e^{-\lambda_2 \cdot t}} = e^{(\lambda_2 - \lambda_1) \cdot t} = 2.$$

Tomando el logaritmo natural en ambos lados:

$$\ln(2) = (\lambda_2 - \lambda_1) \cdot t.$$

Despejando la diferencia de las constantes de desintegración:

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{\ln(2)}{t}.$$

Convertimos $t = 10\,\text{años}$ a segundos:

$$t = 10\,\text{años} \cdot 365\,\text{días/año} \cdot 24\,\text{horas/día} \cdot 3600\,\text{segundos/hora} = 315360000\,\text{s}.$$

Sustituyendo los valores:

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{\ln(2)}{315360000\,\text{s}} = 2{,}20 \cdot 10^{-9}\,\text{s}^{-1}.$$

Por lo tanto, la diferencia entre las constantes de desintegración es $\boldsymbol{\lambda_2 - \lambda_1 = 2{,}20 \cdot 10^{-9}\,\text{s}^{-1}}$.

b) **La relación entre las actividades de dichas fuentes dentro de 20 años.**

Conociendo la diferencia entre las constantes de desintegración de ambas fuentes, podemos calcular la relación de sus actividades después de 20 años. Utilizamos nuevamente la relación:

$$\frac{A_1(t)}{A_2(t)} = e^{(\lambda_2 - \lambda_1) \cdot t}.$$

Dado que $t = 20\,\text{años}$, convertimos a segundos:

$$t = 20\,\text{años} \cdot 365\,\text{días/año} \cdot 24\,\text{horas/día} \cdot 3600\,\text{segundos/hora} = 630{,}720{,}000\,\text{s}.$$

Sustituyendo los valores:

$$\frac{A_1(20)}{A_2(20)} = e^{(2{,}20 \cdot 10^{-9}\,\text{s}^{-1}) \cdot 630{,}720{,}000\,\text{s}} = e^{1{,}387} = 4.$$

Por lo tanto, la relación entre las actividades de las fuentes en 20 años será $\boldsymbol{A_1/A_2 = 4}$.

Pregunta 1. Opción B. Campo Gravitatorio

Se tiene un planeta de masa $1,95 \cdot 10^{25}$ kg y radio 5500 km. Determine:

a) **El módulo de la aceleración de la gravedad en la superficie de dicho planeta.**
b) **La velocidad de escape desde la superficie del planeta.**

Dato: Constante de Gravitación Universal, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m^{2}kg^{-2}.

Solución:

a) **El módulo de la aceleración de la gravedad en la superficie de dicho planeta.**

La aceleración de la gravedad en la superficie de un planeta se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$g = \frac{G \cdot M}{R_p^2},$$

donde:
- $G = 6,67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N\ m^2kg^{-2}}$ es la constante de gravitación universal,
- $M = 1,95 \cdot 10^{25}\,\mathrm{kg}$ es la masa del planeta,
- $R_p = 5500\,\mathrm{km} = 5,5 \cdot 10^6\,\mathrm{m}$ es el radio del planeta.

Sustituyendo los valores en la fórmula:

$$g = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,95 \cdot 10^{25}}{(5,5 \cdot 10^6)^2} = 42,9967\,\mathrm{m/s^2}.$$

Por lo tanto, el módulo de la aceleración de la gravedad en la superficie del planeta es $43,0\,\mathrm{m/s^2}$.

b) **La velocidad de escape desde la superficie del planeta.**

La velocidad de escape es la velocidad mínima que debe tener un cuerpo para liberarse de la atracción gravitatoria de un planeta sin necesidad de propulsión adicional. Se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$v_{\text{escape}} = \sqrt{\frac{2G \cdot M}{R_p}}.$$

Sustituyendo los valores conocidos:

$$v_{\text{escape}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,95 \cdot 10^{25}}{5,5 \cdot 10^6}} = 21747,73\,\mathrm{m/s}.$$

Por lo tanto, la velocidad de escape desde la superficie del planeta es $21\,747,73\,\mathrm{m/s}$.

Pregunta 2. Opción B. Ondas

A una distancia de 10 m, el nivel de intensidad sonora producida por un foco puntual es de 20 dB. Halle:

a) **La potencia del foco.**
b) **El nivel de intensidad sonora a 2 m del foco.**

Dato: Intensidad umbral de audición, $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2.

Solución:

a) **La potencia del foco.**

Conociendo el nivel de intensidad sonora a 10 m, podemos determinar la intensidad de la onda (I_1) a esa misma distancia utilizando la fórmula del nivel de intensidad sonora (β):

$$\beta = 10 \cdot \log\left(\frac{I_1}{I_0}\right).$$

Dado que $\beta = 20\,\text{dB}$, sustituimos los valores conocidos:

$$20 = 10 \cdot \log\left(\frac{I_1}{10^{-12}}\right) \quad \Rightarrow \quad I_1 = 10^{-10}\,\text{W/m}^2.$$

Una vez obtenido el valor de I_1, calcularemos la potencia del foco (P). Sabiendo que el sonido es una onda isotrópica, mecánica y tridimensional que se propaga de forma esférica, la potencia se relaciona con la intensidad y la superficie de la esfera mediante la siguiente fórmula:

$$I_1 = \frac{P}{4\pi r^2}.$$

Despejando la potencia:

$$P = I_1 \cdot 4\pi r^2.$$

Sustituyendo los valores conocidos:

$$P = 10^{-10} \cdot 4\pi \cdot (10)^2 = 1,2566 \cdot 10^{-7}\,\text{W}.$$

Por lo tanto, la potencia del foco es $\boldsymbol{P = 1{,}2566 \cdot 10^{-7}}$ W.

b) **El nivel de intensidad sonora a 2 m del foco.**

Para obtener el valor de la intensidad sonora a 2 m del foco (I_2), utilizaremos la fórmula de la superficie esférica:

$$I_2 = \frac{P}{4\pi r^2}.$$

Sustituyendo los valores conocidos:

$$I_2 = \frac{1,2566 \cdot 10^{-7}}{4\pi \cdot (2)^2} = 2,49 \cdot 10^{-9}\,\text{W/m}^2.$$

Conociendo la intensidad a 2 m del foco, calculamos el nivel de intensidad sonora (β) a esa distancia:

$$\beta = 10 \cdot \log\left(\frac{I_2}{I_0}\right).$$

Sustituyendo los valores:

$$\beta = 10 \cdot \log\left(\frac{2,49 \cdot 10^{-9}}{10^{-12}}\right) = 33,96\,\text{dB}.$$

Por lo tanto, el nivel de intensidad sonora a 2 m del foco es $\boldsymbol{\beta = 33,96}$ dB.

Pregunta 3. Opción B. Campo Electromagnético

Se tienen cuatro cargas cuyo valor absoluto es $|q| = 1 \cdot 10^{-6}$ C, situadas en los vértices de un cuadrado de lado $a = 30$ cm, que está en el plano xy. Dos de ellas son positivas y están en los puntos $(0, 0)$ y (a, a). Las otras dos son negativas y están situadas en los puntos $(0, a)$ y $(a, 0)$. Calcule:

a) **La fuerza que se ejerce sobre la carga $+q$ situada en el punto (a, a) debida a las otras tres.**
b) **La energía potencial de la carga situada en el origen de coordenadas debida a las otras tres.**

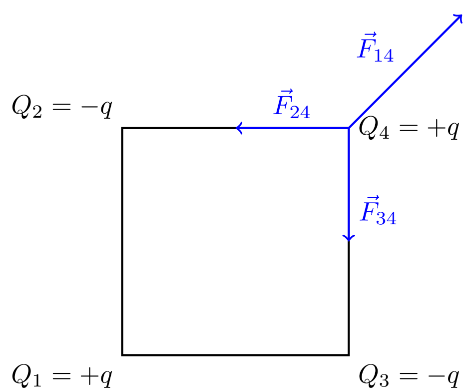
Dato: Constante de la ley de Coulomb, $K = 9 \cdot 10^9$ N m^{2}C^{-2}.

Solución:

a) **La fuerza que se ejerce sobre la carga $+q$ situada en el punto (a, a) debida a las otras tres.**

Para determinar la fuerza que se ejerce sobre la carga positiva $+q$ situada en el punto (a, a) debido a las otras tres cargas, aplicamos la Ley de Coulomb y el principio de superposición de fuerzas. Las posiciones de las cargas son las siguientes:

- $Q_1 = +q$ en $(0, 0)$,
- $Q_2 = -q$ en $(0, a)$,
- $Q_3 = -q$ en $(a, 0)$,
- $Q_4 = +q$ en (a, a)) (carga sobre la cual se calcula la fuerza).



La fuerza eléctrica ejercida por una carga Q sobre otra carga q se calcula mediante la siguiente expresión:

$$\vec{F} = K \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2} \cdot \vec{u}_r,$$

donde:

- $K = 9 \cdot 10^9$ N m^{2}C^{-2} es la constante de Coulomb,
- r es la distancia entre las cargas,
- $\vec{u}_r$ es el vector unitario en la dirección de la línea que une las cargas.

Ahora, calculamos las fuerzas individuales:

- Fuerza ejercida por $Q_1 = +q$ en $(0, 0)$ sobre $Q_4 = +q$ en (a, a):
  La distancia entre Q_1 y Q_4 es:
  $$r_{14} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}.$$
  La dirección de la fuerza es repulsiva, ya que ambas son positivas. El vector unitario en esta dirección es:
  $$\vec{u}_{14} = \frac{(a - 0)\vec{i} + (a - 0)\vec{j}}{a\sqrt{2}} = \frac{\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}}.$$
  La magnitud de la fuerza es:
  $$F_{14} = K \cdot \frac{q^2}{(a\sqrt{2})^2} = K \cdot \frac{q^2}{2a^2}.$$

Por lo tanto, la fuerza vectorial es:

$$\vec{F}_{14} = F_{14} \cdot \vec{u}_{14} = K \cdot \frac{q^2}{2a^2} \cdot \left(\frac{\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}} \right) = \frac{Kq^2}{2a^2\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j}).$$

– Fuerza ejercida por $Q_2 = -q$ en $(0, a)$ sobre $Q_4 = +q$ en (a, a):
La distancia entre Q_2 y Q_4 es:

$$r_{24} = a.$$

La dirección de la fuerza es hacia Q_2 (atractiva, ya que son cargas opuestas). El vector unitario en esta dirección es:

$$\vec{u}_{24} = \frac{(0 - a)\vec{i} + (a - a)\vec{j}}{a} = -\vec{i}.$$

La magnitud de la fuerza es:

$$F_{24} = K \cdot \frac{q^2}{a^2}.$$

Por lo tanto, la fuerza vectorial es:

$$\vec{F}_{24} = F_{24} \cdot \vec{u}_{24} = K \cdot \frac{q^2}{a^2} \cdot (-\vec{i}) = -K \cdot \frac{q^2}{a^2}\vec{i}.$$

– Fuerza ejercida por $Q_3 = -q$ en $(a, 0)$ sobre $Q_4 = +q$ en (a, a):
La distancia entre Q_3 y Q_4 es:

$$r_{34} = a.$$

La dirección de la fuerza es hacia Q_3 (atractiva, ya que son cargas opuestas). El vector unitario en esta dirección es:

$$\vec{u}_{34} = \frac{(a - a)\vec{i} + (0 - a)\vec{j}}{a} = -\vec{j}.$$

La magnitud de la fuerza es:

$$F_{34} = K \cdot \frac{q^2}{a^2}.$$

Por lo tanto, la fuerza vectorial es:

$$\vec{F}_{34} = F_{34} \cdot \vec{u}_{34} = K \cdot \frac{q^2}{a^2} \cdot (-\vec{j}) = -K \cdot \frac{q^2}{a^2}\vec{j}.$$

A continuación, aplicamos el principio de superposición. Para ello, sumamos las fuerzas vectoriales para obtener la fuerza total sobre Q_4:

$$\vec{F}_{\text{Total}} = \vec{F}_{14} + \vec{F}_{24} + \vec{F}_{34}.$$

Sustituyendo los valores calculados:

$$\vec{F}_{\text{Total}} = \frac{Kq^2}{2a^2\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j}) - K \cdot \frac{q^2}{a^2}\vec{i} - K \cdot \frac{q^2}{a^2}\vec{j} = \frac{Kq^2}{2\sqrt{2}a^2}\vec{i} + \frac{Kq^2}{2\sqrt{2}a^2}\vec{j} - \frac{Kq^2}{a^2}\vec{i} - \frac{Kq^2}{a^2}\vec{j}.$$

Agrupando:

$$\vec{F}_{\text{Total}} = \left(\frac{Kq^2}{2\sqrt{2}a^2} - \frac{Kq^2}{a^2} \right) \vec{i} + \left(\frac{Kq^2}{2\sqrt{2}a^2} - \frac{Kq^2}{a^2} \right) \vec{j}.$$

Calculando numéricamente:

$$\vec{F}_{\text{Total}} = -6,46 \cdot 10^4\,\vec{i} - 6,46 \cdot 10^4\,\vec{j} \text{ N}.$$

Por lo tanto, la fuerza que se ejerce sobre la carga $+q$ situada en el punto (a, a) es $\vec{F}_{\text{Total}} = -6,46 \cdot 10^4\,\vec{i} - 6,46 \cdot 10^4\,\vec{j}$ N.

b) La energía potencial de la carga situada en el origen de coordenadas debida a las otras tres.

Dado que el campo electrostático es un campo conservativo, se puede definir una energía potencial: la energía potencial (E_p) es aquella que tiene una determinada carga por encontrarse bajo la influencia de otra u otras cargas. La energía potencial se puede encontrar a partir el potencial (V) que cada carga genera sobre la carga q_1:

$$E_p = K \cdot \frac{q \cdot Q}{r} = V \cdot q.$$

Hallamosel valor del potencial total (V_T) sobre la carga q_1, mediante el principio de superposición:

$$V_T = V_2 + V_3 + V_4 = K \cdot \frac{q_2}{r} + K \cdot \frac{q_3}{r} + K \cdot \frac{q_4}{r}.$$

Consideramos las posiciones y signos de las cargas:
- $q_2 = -q$ en $(0, a)$,
- $q_3 = -q$ en $(a, 0)$,
- $q_4 = +q$ en (a, a).

Las distancias desde q_1 hasta cada carga son:
- $r_{12} = a$,
- $r_{13} = a$,
- $r_{14} = a\sqrt{2}$.

Sustituyendo en la fórmula del potencial total:

$$\begin{aligned} V_T &= K \cdot \frac{-q}{a} + K \cdot \frac{-q}{a} + K \cdot \frac{+q}{a\sqrt{2}} = -\frac{Kq}{a} - \frac{Kq}{a} + \frac{Kq}{a\sqrt{2}} = -\frac{2Kq}{a} + \frac{Kq}{a\sqrt{2}} \\ &= -\frac{2 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 1 \cdot 10^{-6}}{0{,}3} + \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 1 \cdot 10^{-6}}{0{,}3 \cdot \sqrt{2}} = -3{,}88 \cdot 10^4 \text{ V}. \end{aligned}$$

Finalmente, obtenemos el valor de la energía potencial:

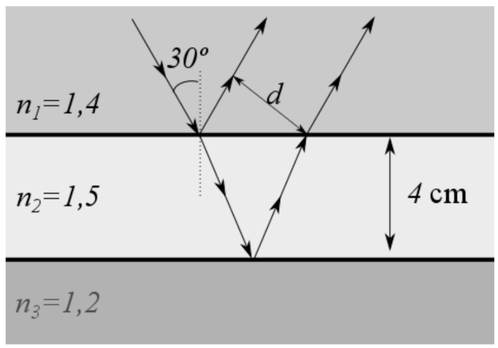
$$E_p = V_T \cdot q = -3{,}88 \cdot 10^4 \text{ V} \cdot 1 \cdot 10^{-6} \text{ C} = -3{,}88 \cdot 10^{-2} \text{ J}.$$

Por lo tanto, la energía potencial de la carga situada en el origen de coordenadas debida a las otras tres es $\boldsymbol{E_p = -3{,}88 \cdot 10^{-2}}$ J.

Pregunta 4. Opción B. Ondas

Una placa de vidrio de 4 cm de espesor y de índice de refracción 1,5 se encuentra sumergida entre dos aceites de índices de refracción 1,4 y 1,2 respectivamente. Proveniente del aceite de índice 1,4 incide sobre el vidrio un haz de luz con un ángulo de incidencia de 30º. Calcule:

a) **La distancia, *d*, entre el rayo reflejado por la cara superior del vidrio y el refractado después de reflejarse en la cara inferior del vidrio.**
b) **El ángulo de incidencia mínimo en la cara superior del vidrio necesario para que se produzca el fenómeno de reflexión total en la cara inferior de la placa de vidrio.**



Solución:

a) **La distancia, *d*, entre el rayo reflejado por la cara superior del vidrio y el refractado después de reflejarse en la cara inferior del vidrio.**

Primero, aplicamos la Ley de Snell en la cara superior del vidrio:

$$n_i \cdot \sin\theta_i = n_r \cdot \sin\theta_r,$$

donde:
- $n_i = 1,4$ (índice de refracción del aceite),
- $\theta_i = 30^\circ$ (ángulo de incidencia),
- $n_r = 1,5$ (índice de refracción del vidrio),
- θ_r es el ángulo refractado.

Sustituyendo los valores:

$$1,4 \cdot \sin 30^\circ = 1,5 \cdot \sin\theta_r \Rightarrow \sin\theta_r = \frac{1,4 \cdot 0,5}{1,5} = \frac{0,7}{1,5} = 0,47 \quad \Rightarrow \quad \theta_r = \arcsin(0,47) \approx 27,8^\circ$$

Conociendo el valor del ángulo refractado, procedemos a construir un triángulo rectángulo donde uno de los catetos es el espesor de la placa de vidrio (4 cm) y el ángulo correspondiente es $\theta_r = 27,8^\circ$. Utilizando las propiedades trigonométricas:

$$\tan 27,8^\circ = \frac{x}{4\,\text{cm}} \Rightarrow x = 4\,\text{cm} \cdot \tan 27,8^\circ = 2,11\,\text{cm}.$$

La distancia total d' es el doble de x, ya que la normal corta el lado en dos partes iguales:

$$d' = 2 \cdot 2,11\,\text{cm} = 4,22\,\text{cm}$$

Finalmente, aplicamos la trigonometría para encontrar la distancia entre los rayos reflejados:

$$\sin 60^\circ = \frac{d}{4,22\,\text{cm}} \Rightarrow d = 4,22\,\text{cm} \cdot \sin 60^\circ = 3,65\,\text{cm}$$

Por lo tanto, la distancia pedida es $d = 3,65$ cm.

b) **El ángulo de incidencia mínimo en la cara superior del vidrio necesario para que se produzca el fenómeno de reflexión total en la cara inferior de la placa de vidrio.**

Para que se produzca el fenómeno de reflexión total, el rayo de luz debe pasar de un medio más refringente a uno menos refringente, y el ángulo de incidencia debe ser mayor al ángulo límite. Primero, determinamos el ángulo límite en la cara inferior del vidrio. La reflexión total ocurre cuando el ángulo de refracción es 90°. Aplicamos la Ley de Snell:

$$n_r \cdot \sin\theta_c = n_{\text{aceite inferior}} \cdot \sin 90^\circ \Rightarrow \sin\theta_c = \frac{n_{\text{aceite inferior}}}{n_r} = \frac{1,2}{1,5} = 0,8 \Rightarrow \theta_c = \arcsin(0,8) = 53,13^\circ.$$

A continuación, aplicamos la Ley de Snell para determinar el ángulo de incidencia mínimo β en la cara superior del vidrio necesario para que ocurra reflexión total en la cara inferior:

$$n_{\text{aceite superior}} \cdot \sin\beta = n_r \cdot \sin 53,13^\circ \Rightarrow \sin\beta = \frac{1,5 \cdot \sin 53,13^\circ}{1,4} = \frac{1,5 \cdot 0,8}{1,4} = 0,857.$$

Finalmente, obtenemos:

$$\beta = \arcsin(0,857) = 59^\circ.$$

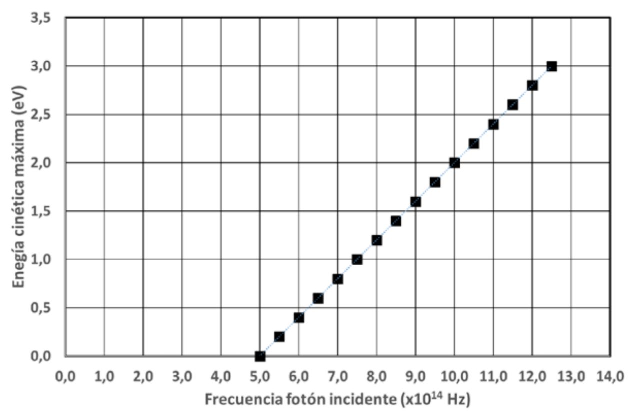
Por lo tanto, el ángulo de incidencia mínimo es $\beta = 59^\circ$.

Pregunta 5. Opción B. Física Moderna

Se hace incidir un haz de fotones de frecuencia variable sobre una lámina de material metálico, de manera que se emiten electrones cuya energía cinética máxima se mide, obteniendo la gráfica que se adjunta. Determine:

a) **El trabajo de extracción del metal en eV.**
b) **La longitud de onda de de Broglie asociada a los electrones que se emiten, con máxima energía cinética, cuando la frecuencia de los fotones incidentes es de $10 \cdot 10^{14}$ Hz.**

Datos: Valor absoluto de la carga del electrón, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C; Masa del electrón, $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg; Constante de Planck, $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ J s.



Solución:

a) **El trabajo de extracción del metal en eV.**

Para determinar el trabajo de extracción, utilizamos la ecuación de Einstein para el efecto fotoeléctrico:

$$h \cdot f = W_{\text{extracción}} + E_{\text{cinética max}},$$

donde:
- h es la constante de Planck,
- f es la frecuencia de los fotones incidentes,
- $W_{\text{extracción}}$ es el trabajo de extracción del metal,
- $E_{\text{cinética max}}$ es la energía cinética máxima de los electrones emitidos.

Convertimos la energía cinética máxima a Julios:

$$E_{\text{cinética max}} = 2\,\text{eV} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\frac{\text{J}}{\text{eV}} = 3{,}2 \cdot 10^{-19}\,\text{J}.$$

Calculamos la energía del fotón incidente:

$$E_{\text{fotón}} = h \cdot f = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\,\text{J s} \cdot 10 \cdot 10^{14}\,\text{Hz} = 6{,}63 \cdot 10^{-19}\,\text{J}.$$

Determinamos el trabajo de extracción:

$$W_{\text{extracción}} = E_{\text{fotón}} - E_{\text{cinética max}} = 6{,}63 \cdot 10^{-19}\,\text{J} - 3{,}2 \cdot 10^{-19}\,\text{J} = 3{,}43 \cdot 10^{-19}\,\text{J}.$$

Convertimos el trabajo de extracción a electronvoltios (eV):

$$W_{\text{extracción}} = \frac{3{,}43 \cdot 10^{-19}\,\text{J}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\frac{\text{J}}{\text{eV}}} = 2{,}14\,\text{eV}.$$

Por lo tanto, el trabajo de extracción del metal es de aproximadamente 2,14 eV.

b) **La longitud de onda de de Broglie asociada a los electrones que se emiten, con máxima energía cinética, cuando la frecuencia de los fotones incidentes es de $10 \cdot 10^{14}$ Hz.**

El principio de de Broglie establece que toda partícula con movimiento posee una onda asociada cuya longitud de onda se calcula mediante:

$$\lambda = \frac{h}{p},$$

donde p es el momento lineal de la partícula, dado por:

$$p = m_e \cdot v.$$

Sin embargo, sabemos que la energía cinética máxima de los electrones emitidos es:

$$E_{\text{cinética max}} = \frac{1}{2} m_e v^2.$$

Despejando la velocidad v:

$$v = \sqrt{\frac{2E_{\text{cinética max}}}{m_e}}.$$

Hallamos la longitud de onda de de Broglie:

$$\lambda = \frac{h}{m_e \cdot v} = \frac{h}{\sqrt{2mE_{\text{cinética max}}}} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s}}{\sqrt{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot 3,2 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}} = 8{,}69 \cdot 10^{-10}\ \text{m}.$$

Por lo tanto, la longitud de onda de de Broglie asociada a los electrones emitidos es de $8{,}69 \cdot 10^{-10}$ m.